

Los números de Ramsey y el álgebra

por

Emilio Fernández Moral y Luz Roncal*

RESUMEN. Se exponen en este artículo algunos resultados sobre ciertos problemas de coloración de grafos. Concretamente, describimos los trabajos de R. E. Greenwood y A. M. Gleason, y otros autores, sobre el cálculo de *números de Ramsey* pequeños (que se inscriben en el marco de la llamada Teoría de Ramsey). Las demostraciones que incluimos se basan en consideraciones de naturaleza algebraica.

1. INTRODUCCIÓN: LOS NÚMEROS DE RAMSEY

Dados tres números enteros, al menos dos son de la misma paridad, es decir, o dos de ellos son pares o hay dos impares. Esta simple observación es un ejemplo sencillo del llamado principio del palomar (o de las cajas, o de Dirichlet), que dice así: *Si un conjunto P de p elementos se divide en una familia \mathcal{N} de n subconjuntos disjuntos, y $p > n$, entonces hay al menos un conjunto de \mathcal{N} que contiene al menos dos elementos de P . Si $p > nq$, entonces hay al menos un conjunto de \mathcal{N} que contiene al menos $q + 1$ elementos de P .*¹

En las competiciones matemáticas es habitual encontrar problemas que requieren aplicaciones ingeniosas de este principio. Por ejemplo, un enunciado ya clásico es el denominado «problema de la reunión»: *En cualquier reunión de seis personas siempre habrá al menos tres que se conocen entre sí mutuamente, o bien al menos tres que son mutuamente desconocidas.* Este problema se planteó en 1953 en la 13.^a Putnam Competition² redactado de la forma siguiente:

Se tienen seis puntos en posición general en el espacio (de modo que no hay tres en línea ni cuatro coplanarios). Se trazan los segmentos que los unen por parejas y se colorean, unos segmentos de rojo y otros de azul. Probar que algún triángulo tiene todos sus lados del mismo color.

*El trabajo de L. Roncal está financiado por el proyecto MTM2009-12740-C03-03.

¹Aunque conceptualmente no está relacionado, este enunciado recuerda un poco el chiste aquel del matemático que, al ver por la ventanilla del tren una oveja negra, dice: «Hay al menos una oveja que tiene negro al menos uno de sus costados».

²Problema A2 ([13, p. 38, solución en p. 365–366]), sugerido a la Competición ([29, p. 242]) por Frank Harary (1921–2005), uno de los nombres fundamentales de la teoría de grafos. La William Lowell Putnam Mathematical Competition, administrada por la Mathematical Association of America, se celebra en Estados Unidos anualmente desde 1938. Este mismo problema se propuso unos años después en la revista *The American Mathematical Monthly* (problema E1321, en vol. 66 (1959), p. 141–142).

Los siguientes³ dos enunciados se propusieron en Olimpiadas Internacionales de Matemáticas (IMO por sus siglas en inglés), y parecen compartir con el anterior el mismo «sabor», aunque el segundo nos parezca algo más raro:

Problema 4 de la 6.^a IMO (Moscú, 1964):⁴ *Cada uno de los estudiantes de un grupo de 17 habla con cada uno de los demás. Todos ellos hablan de tres temas diferentes. Cada pareja de estudiantes habla entre sí de uno solo de los temas. Probar que hay tres estudiantes que hablan entre ellos del mismo tema.*

Problema 6 de la 20.^a IMO (Bucarest, 1978):⁵ *Los miembros de una sociedad internacional son de seis países. La lista de miembros contiene 1978 nombres, numerados 1, 2, ..., 1978. Probar que hay al menos un miembro cuyo número es la suma de los números de dos, no necesariamente distintos, de sus compatriotas.*

Igual que el de la reunión, estos problemas se pueden modelizar usando un poco de teoría de grafos. Aunque la mayor parte de la investigación en este campo se ha llevado a cabo en los últimos 50 años, los orígenes de dicha teoría se encuentran en el célebre problema del recorrido imposible por los siete puentes de Königsberg. Nos tomamos la licencia de reproducir su resolución por L. Euler (ver [10]) en el siglo XVIII, en la figura 1,⁶ si bien este problema no está relacionado con el propósito principal del presente artículo.

Introducimos ahora varios conceptos y definiciones básicas de la teoría de grafos. Un *grafo* es una colección de puntos y de líneas que conectan esos puntos. Más formalmente,⁷ un grafo G está formado por un conjunto no vacío V (los *vértices* del grafo) y un conjunto A de pares no ordenados de puntos de V (las *aristas* del grafo); decimos, por ejemplo, que la arista $\{v_1, v_2\}$ (que también denotaremos por v_1v_2) *conecta* los vértices v_1 y v_2 , o v_2 y v_1 , de G . Las posibles aristas que conectan un vértice consigo mismo se llaman *bucles*. Un grafo *simple* es el que no contiene bucles ni aristas repetidas. Un *grafo completo* es un grafo simple en el que cada par de vértices está conectado por una arista. El grafo completo de n vértices se denota por K_n .

Con esta nomenclatura, el problema de la reunión se formularía así: *Coloreamos todas las aristas de K_6 de rojo o azul. Probar que siempre habrá un⁸ triángulo*

³Hemos tomado esta selección de problemas del artículo [18] del profesor Ben Green de Cambridge.

⁴Propuesto por Hungría; [7, p. 33, solución en p. 341].

⁵Propuesto por Holanda; [7, p. 123, solución en p. 421].

⁶Transcribimos la traducción al castellano, debida a Miguel Muntaner, que se lee en [25, p. 167]: «9. En el caso de los puentes de Königsberg, puesto que son cinco los puentes que conducen a la isla A , es necesario que en la designación del recorrido por estos puentes aparezca tres veces dicha letra. También la letra B debe aparecer dos veces, puesto que a la región B conducen tres puentes, y de igual modo la letra D debe aparecer dos veces, y también dos veces la letra C . En la serie de ocho letras, con que debe designarse el recorrido por los siete puentes, la letra A tendría que estar presente tres veces, y cada una de las letras B , C y D , dos veces; lo cual es totalmente imposible en una serie de ocho letras. Con lo cual vemos que no se puede realizar un tal recorrido por los siete puentes de Königsberg.»

⁷En rigor, aquí estamos llamando grafos sólo a los grafos no dirigidos. En los grafos dirigidos, el conjunto de aristas está formado por pares ordenados de puntos de V .

⁸En [14] se prueba que siempre habrá al menos **dos** triángulos monocromáticos, pero tratar esto nos desviaría de nuestra ruta.

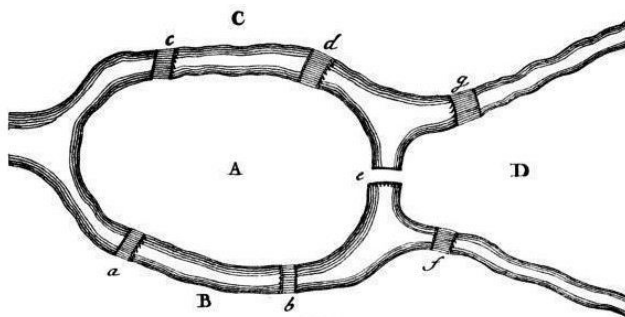


Fig. 1.

9. In casu igitur pontium transeundorum Regiomontano (Fig. 1), quia in insulam A quinque pontes deducunt a, b, c, d, e, necesse est, ut in designatione transitus per hos pontes littera A ter occurrat. Deinde littera B, quia in regionem B tres pontes conducunt, bis debet occurrere similique modo littera D bis debet occurrere atque etiam littera C bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera A ter adesse deberet, litterarum vero B, C et D unaquaqueque bis; id quod in serie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perspicuum est per septem pontes Regiomontanos talem transitum institui non posse.

Figura 1: Problema de los siete puentes de Königsberg (la traducción del texto está en la nota al pie numerada como 6).

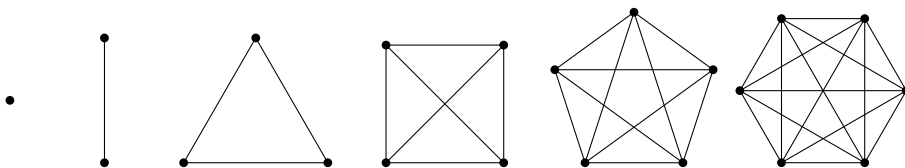


Figura 2: Los grafos completos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 y K_6 .

monocromático (es decir, que nuestro K_6 de aristas bi-coloreadas contendrá, o bien un K_3 de aristas rojas, o bien un K_3 de aristas azules).⁹

Para resolver el problema, sólo tenemos que fijarnos en un vértice v_0 de K_6 . De las cinco aristas que parten de v_0 , por el principio del palomar ($6 > 2 \cdot 2$), al menos tres comparten uno de los dos colores; supongamos, por ejemplo, que las aristas que conectan el vértice v_0 con cada uno de los vértices v_1, v_2 y v_3 son rojas. Si dos de estos vértices v_1, v_2 y v_3 , por ejemplo los vértices v_1 y v_2 , están conectados por una arista roja, el triángulo $v_0v_1v_2$ es rojo. Si no, el triángulo $v_1v_2v_3$ es azul.

Por razones tipográficas, en las figuras del artículo se van a representar los colores de las líneas mediante trazos diferentes. Usaremos el trazo continuo grueso para el

⁹Formalmente, una r -coloración de las aristas de un grafo $G = (V, A)$ no es más que una función $X: A \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$; si $a \in A$, $X(a)$ es el color de la arista. Una r -coloración divide el conjunto A de aristas de G en clases disjuntas. En el caso $r = 2$ nosotros hablaremos de colores rojo y azul, pero en algunos lugares de la literatura se prefiere hablar de aristas presentes o ausentes en el grafo. Así, el problema de la reunión se reformularía: todo grafo de 6 vértices, o contiene un triángulo, o contiene tres vértices independientes (no conectados a otro vértice por ninguna arista).

color rojo, el trazo continuo más fino para el color azul y el trazo punteado para el color verde, como se muestra en la figura 3.



Figura 3: Leyenda de colores en las figuras (¡imprescindible tenerlo en cuenta si se está leyendo el artículo impreso sin colores!).

Por supuesto, si $n > 6$, el grafo K_n de aristas bi-coloreadas contendrá siempre algún triángulo monocromático, pues K_n contendrá subgrafos¹⁰ K_6 . Pero, por el otro lado ($n < 6$), la figura 4 basta para demostrar que se pueden colorear las aristas del grafo K_5 de rojo o de azul sin que haya triángulos monocromáticos.

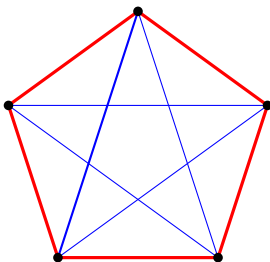


Figura 4: Una reunión de 5 personas.

De manera similar, el problema 4 de la 6.^a IMO queda reformulado así: *Coloreamos todas las aristas del grafo K_{17} de rojo, azul o verde. Probar que debe haber algún triángulo monocromático.* Y también, como en el caso anterior, podríamos preguntarnos por lo que ocurre si reemplazamos K_{17} por K_{16} .

Este tipo de problemas da una muestra de las cuestiones que aborda la *Teoría de Ramsey*.

Frank Plumpton Ramsey (1903–1930) fue un matemático, filósofo y economista británico que desarrolló toda su actividad en Cambridge hasta su muerte temprana con sólo 26 años. El teorema principal de su artículo [27]¹¹ se considera el punto de partida de la teoría que lleva su nombre. Se puede



F. P. Ramsey (1921)

¹⁰El grafo $G' = (V', A')$ es un *subgrafo* del grafo $G = (V, A)$ si $V' \subset V$ y A' es un subconjunto de A formado por aristas que en G conectan vértices de V' .

¹¹Ramsey, que no llegó a ver publicado este trabajo suyo, demostraba en él dos originales teoremas (una versión infinita y otra finita del mismo) de tipo combinatorio que venían a ser una extensión profunda del principio del palomar, junto con ciertas aplicaciones de los mismos a la lógica matemática. Ver [16, p. 19–25].

leer en castellano, en [11], una preciosa reseña acerca de la vida y de la teoría de Ramsey, que concluye con una excelente información bibliográfica general.¹²

En su versión reducida aplicable a grafos de aristas coloreadas,¹³ el teorema de Ramsey afirma lo siguiente:

TEOREMA 1. *Sean $r \geq 2$ y m_1, m_2, \dots, m_r enteros fijos. Existe un mínimo entero¹⁴ $N = R(m_1, m_2, \dots, m_r)$ tal que, si $n \geq N$, el grafo K_n con las aristas coloreadas arbitrariamente con cualquiera de r colores diferentes contiene, o bien un subgrafo K_{m_1} monocromático (con todas las aristas del primer color), o bien un K_{m_2} con todas las aristas del segundo color, \dots , o bien un K_{m_r} con todas las aristas del r -ésimo color.*

Los números $R(m_1, m_2, \dots, m_r)$ se denominan *números de Ramsey*. Por ejemplo, al resolver el problema de la reunión hemos probado que si $r = 2$ y $m_1 = m_2 = 3$, el número $n = 6$ cumple la conclusión del teorema, y por lo tanto que $R(3, 3) \leq 6$. Y después, al ver que hay una bi-coloración de K_5 sin triángulos monocromáticos hemos probado que $R(3, 3) > 5$. De ambos resultados se concluye que $R(3, 3) = 6$ y hemos terminado así de calcular nuestro primer número de Ramsey. El número de Ramsey bicolor $R(m, \ell)$ es entonces el menor entero N para el que se cumple que, en cualquier reunión de N personas, o bien hay m que se conocen mutuamente entre sí, o bien hay ℓ que son entre sí mutuamente desconocidas. Es claro, por simetría, que $R(m, \ell) = R(\ell, m)$, y es inmediato que $R(2, \ell) = \ell$ ($\ell \geq 2$).

Resulta muy complicado encontrar los valores exactos de $R(m_1, m_2, \dots, m_r)$ incluso para valores pequeños de $r \geq 2$ y de los $m_i \geq 3$. De hecho, a fecha de hoy¹⁵ solamente se conocen diez de estos números de Ramsey, nueve bicolors ($R(m, \ell)$, con $m \leq \ell$) y uno tricolor. Son, además de $R(3, 3) = 6$, los que figuran en el cuadro 1 (de honor), donde indicamos también los autores del resultado¹⁶ y el año de su publicación.

El propósito central de esta nota es exponer los resultados pioneros de Greenwood y Gleason. Para ello, en la sección siguiente haremos una incursión en el álgebra que sirva para aclarar su modo de refinar las cotas inferiores. En la sección 3 se demuestra con detalle la desigualdad $R(3, 3, 3) \geq 17$, describiendo la técnica utilizada por Greenwood y Gleason, así como otras demostraciones desarrolladas posteriormente por otros autores. En la sección 4 se recogen otros resultados concernientes a números de Ramsey bicolors.

¹²A la que por nuestra parte sólo añadiríamos hoy dos libros recientes, [29] y [30].

¹³Ver [11, p. 272]; [16, p. 3–5]. La primera versión del teorema de Ramsey en esta forma se debe a P. Erdős y G. Szekeres, que dan dos demostraciones en [9, p. 466–468].

¹⁴Si queremos destacar que estamos usando coloraciones de aristas, una notación más completa sería $R(m_1, m_2, \dots, m_r; 2)$, ver para ello [11, p. 273]. En el caso más simple (coloraciones de vértices), $R(m_1, m_2, \dots, m_r; 1) = \sum_{i=1}^r m_i - (r - 1)$, en lo que sería una versión del principio del palomar. Nos estamos limitando además a hablar de números *clásicos* de Ramsey, ver [26].

¹⁵En [17], con estupendos gráficos para los números bicolors, se puede ver cómo estaba la situación en el año 1990. Para la puesta al día se puede consultar [26].

¹⁶Donde figuran dos autorías en columna para un mismo número de Ramsey, la de arriba corresponde a la acotación inferior y la de abajo a la acotación superior.

R. E. GREENWOOD Y A. M. GLEASON (1955)	$R(3, 4) = 9$ $R(3, 5) = 14$ $R(4, 4) = 18$ $R(3, 3, 3) = 17$
G. KÉRY (1964)	$R(3, 6) = 18$
J. G. KALBFLEISCH (1966) J. E. GRAVER Y J. YACKEL (1968)	$R(3, 7) = 23$
C. GRINSTEAD Y S. ROBERTS (1982) B. D. MCKAY Y ZHANG KE MIN (1992)	$R(3, 8) = 28$
J. G. KALBFLEISCH (1966) C. GRINSTEAD Y S. ROBERTS (1982)	$R(3, 9) = 36$
J. G. KALBFLEISCH (1965) B. D. MCKAY Y S. P. RADZISZOWSKI (1995)	$R(4, 5) = 25$

Cuadro 1: Además de $R(3, 3) = 6$, estos son los otros nueve números de Ramsey $R(m_1, m_2, \dots, m_r)$ conocidos ($r \geq 2$, $m_i \geq 3$).

Terminaremos esta sección introductoria probando que $R(3, 3, 3) \leq 17$ (es la parte fácil en la determinación de este número de Ramsey), lo que resuelve de paso el problema 4 de la 6.^a IMO:

En un K_{17} con aristas tri-coloreadas (rojo, verde, azul), sea v_0 un vértice cualquiera. Por el principio del palomar ($16 > 3 \cdot 5$), al menos seis de las dieciséis aristas que parten de v_0 comparten un mismo color. Pongamos, por ejemplo, que sean rojas las aristas que conectan v_0 con v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6 . Si alguna de las aristas del subgrafo K_6 de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$, por ejemplo la arista $\{v_1, v_2\}$, es roja, entonces el triángulo $v_0v_1v_2$ es rojo. En otro caso, todas las aristas de dicho subgrafo K_6 son verdes o azules. Como $R(3, 3) = 6$, ese subgrafo debe contener un triángulo verde o un triángulo azul.

2. MOVIÉNDONOS POR EL ÁLGEBRA

Antes de conocer la fuente original [19], la búsqueda afanosa de una tricoloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos llevó un día al primero de nosotros, en la biblioteca de la Universidad de La Rioja, hasta [3, p. 119]; Béla Bollobás enunciaba allí el siguiente problema:

Considerando la 3-coloración de K_{16} con conjunto de vértices $GF(16)$, el cuerpo de orden 16, en la que el color de la arista ij depende de la coclase del grupo de los restos cúbicos a la que pertenece $i - j$, probar que $R(3, 3, 3) = 17$. Hay que comprobar que el grafo está bien definido.

Así pues, todo se reducía a seguir las «instrucciones» de Bollobás. Para ser sinceros, lo primero era tratar de descifrarlas; después costaba ver por qué funcionaban bien las cosas, pero al final salía uno con su flamante y deseada coloración de K_{16} , que se muestra en la figura 5 (recordemos que los trazos rojos se ven gruesos, los azules finos y los verdes punteados).

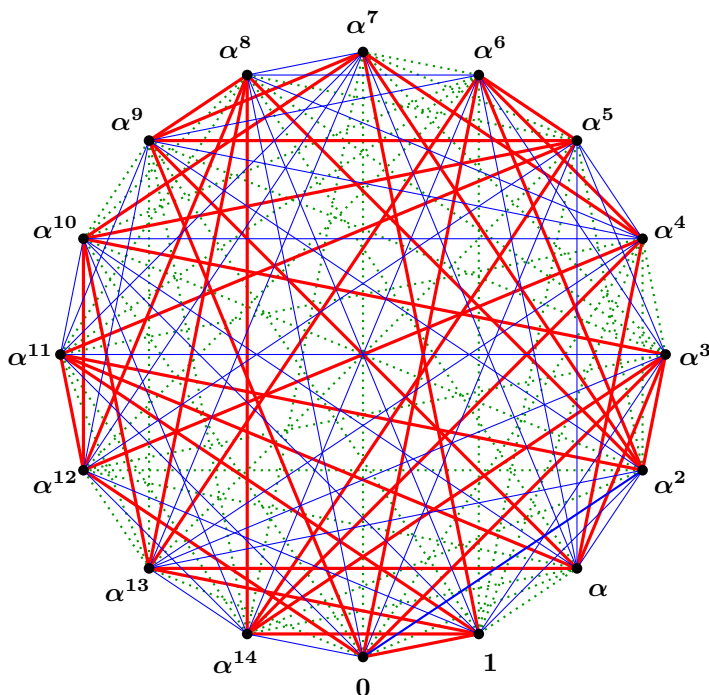


Figura 5: La tricoloración de K_{16} de Greenwood y Gleason.

Colocados en el mismo punto de vista de aprendices que fue el nuestro entonces, presentaremos a continuación, de un modo que pueda resultar didáctico, un resumen (sin pruebas) de los objetos y conceptos algebraicos o de teoría de números que quedan por detrás de aquellas instrucciones. Con ello tal vez proporcionemos, al lector que tiene una formación matemática básica pero poco especializada en este tema, una vía rápida de acceso a la construcción de Greenwood y Gleason.¹⁷ Si ampliamos un poco nuestro alcance es para presentar de paso el aparato algebraico necesario para seguir bien el resto del artículo, donde aparecerá algún otro modo de conseguir «buenas» coloraciones de K_{16} y otros grafos.

¹⁷El enunciado de Bollobás (que por su parte transcribe casi literalmente unas líneas de [15, p. 97]) simplemente está presentando resumida esa construcción, que se encuentra en [19, p. 4–5]. Otra cuestión sería saber cómo llegaron Robert E. Greenwood (1911–1993) y Andrew M. Gleason (1921–2008) a su técnica de utilizar grafos con vértices en cuerpos finitos. Tal vez su anterior trabajo conjunto en el servicio criptográfico de la Marina estadounidense durante la II Guerra Mundial (ver [2, p. 1239–1243 y 1251–1252]) les allanó el camino.

Sea n un número natural. La relación de congruencia módulo n ($a \equiv b \pmod n$ si $a - b$ es múltiplo de n) divide el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros en n clases de equivalencia disjuntas, agrupando cada una de ellas los números que dan el mismo resto (de los n restos posibles $0, 1, \dots, n-1$) al dividirlos por n . El conjunto de las n clases se denota por \mathbb{Z}_n . Los elementos de \mathbb{Z}_n se pueden denotar por $0, 1, \dots, n-1$, y quedan inducidas en este conjunto operaciones de suma y producto (suma y producto de enteros «módulo n »; por ejemplo, $1 + 1 = 0$ en \mathbb{Z}_2 ; $2 + 3 = 1$ en \mathbb{Z}_4 ; $2 \cdot 2 = 0$ en \mathbb{Z}_4 ; $2 \cdot 3 = 1$ en \mathbb{Z}_5) cuyas propiedades confieren a \mathbb{Z}_n , en general, una estructura algebraica de anillo con unidad. En particular, con la operación suma, \mathbb{Z}_n es un grupo abeliano de orden n (es decir, de n elementos) cuya estructura es de grupo cíclico.

Por suma directa, los grupos aditivos \mathbb{Z}_n y \mathbb{Z}_m constituyen el grupo aditivo $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$, también abeliano y de orden nm . Por ejemplo, los cuatro elementos del grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ se pueden representar mediante las «palabras» 00, 01, 10, 11, definiendo la suma de dos palabras simplemente como la concatenación de la suma de sus «letras» en \mathbb{Z}_2 , es decir, $10 + 11 = 01$, etc. La estructura de $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ es de grupo diédrico.

Cuando p es un número primo, \mathbb{Z}_p tiene estructura de cuerpo, porque todo elemento no nulo tiene entonces inverso multiplicativo. Es un (el) cuerpo de orden p (de p elementos), y el ejemplo genérico más sencillo de los cuerpos finitos, es decir, cuerpos con un número finito de elementos. Curiosamente, el orden de un cuerpo finito sólo puede ser un número de la forma p^k , donde p es un número primo y k un entero positivo. Y esencialmente hay un solo cuerpo de p^k elementos, en el sentido de que dos cuerpos finitos del mismo orden son isomorfos.¹⁸ El único cuerpo de p^k elementos se denota¹⁹ por $GF(p^k)$. Para $k \geq 2$, la construcción del cuerpo $GF(p^k)$ es algo complicada y la vamos a recordar.

Denotemos por $\mathcal{F}[x]$ al conjunto de los polinomios en x con coeficientes en un cuerpo \mathcal{F} . Un polinomio $q(x)$ es irreducible en $\mathcal{F}[x]$ si no se puede factorizar en dos polinomios de $\mathcal{F}[x]$ de grado positivo. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}_2[x]$, el polinomio $q(x) = x^2 + x + 1$ es irreducible. En efecto, si se pudiera factorizar, sería producto de dos polinomios de grado 1 con coeficientes en \mathbb{Z}_2 . Esto es lo mismo que decir que $q(x)$ tendría raíces en \mathbb{Z}_2 . Pero $q(0) = 1$ y $q(1) = 1$, con lo que el polinomio no tiene raíces en \mathbb{Z}_2 . Otro ejemplo: el polinomio $x^4 + x + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$ porque ni tiene raíces en \mathbb{Z}_2 ni es divisible por el único polinomio irreducible de grado 2 en $\mathbb{Z}_2[x]$ (que es $x^2 + x + 1$; al dividir $x^4 + x + 1$ entre $x^2 + x + 1$ queda x^2 como cociente y $x^3 + x^2 + x + 1$ como resto).

Un polinomio $q(x)$ de grado k , irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$, se dice primitivo si el mínimo entero positivo n para el que $q(x)$ divide a $x^n + 1$ es $n = p^k - 1$. Por ejemplo, el polinomio $q(x) = x^4 + x + 1$, irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$, es primitivo, porque divide a $x^{15} + 1$, pero no divide a $x^n + 1$ para $1 \leq n < 15$.

El cuerpo finito $GF(p^k)$ puede construirse entonces a partir de cualquier polinomio $q(x)$ de grado k , irreducible en $\mathbb{Z}_p[x]$ y primitivo, del siguiente modo: si α es

¹⁸Es decir, hay una biyección entre los elementos de ambos conjuntos que conserva las dos operaciones.

¹⁹Las siglas GF significan «Galois field» (cuerpo de Galois), en honor del famoso matemático Évariste Galois, que hizo contribuciones fundamentales al álgebra moderna.

una raíz del polinomio $q(x)$, se cumple que $\alpha^{p^k-1} = 1$, y

$$GF(p^k) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{p^k-2}\},$$

con las operaciones habituales de suma y producto.

El grupo multiplicativo $GF^*(p^k) = GF(p^k) \setminus \{0\}$ es cíclico, y por otra parte se puede dar una representación de la forma $a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{k-1}\alpha^{k-1}$ (con $a_i \in \mathbb{Z}_p$) para cada elemento de $GF(p^k)$ que hace la suma de dos elementos fácil de calcular, porque consiste sencillamente en sumar polinomios en $\mathbb{Z}_p[\alpha]$.

Por ejemplo, para construir $GF(4)$ tomamos el polinomio $q(x) = x^2 + x + 1$, irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$ y primitivo. Si α es una raíz de $q(x)$, resulta²⁰ que $\alpha^2 = \alpha + 1$ y $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha = 1$, y con esto podemos escribir ya las tablas de suma y producto en el cuerpo $GF(4) = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$ (que diferencian bien su estructura de la del anillo \mathbb{Z}_4 que tiene también cuatro elementos; el grupo aditivo de \mathbb{Z}_4 es cíclico, mientras que el grupo aditivo de $GF(4)$ es diédrico), ver el cuadro 2.

+	0	1	α	α^2	·	0	1	α	α^2
0	0	1	α	α^2	0	0	0	0	0
1	1	0	α^2	α	1	0	1	α	α^2
α	α	α^2	0	1	α	0	α	α^2	1
α^2	α^2	α	1	0	α^2	0	α^2	1	α

Cuadro 2: Operaciones en $GF(4)$.

Del mismo modo, el cuerpo $GF(16)$ queda construido con los 16 números $0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{14}$, siendo α una raíz del polinomio $x^4 + x + 1$, que es irreducible en $\mathbb{Z}_2[x]$ y primitivo. Se tiene $\alpha^{15} = 1$, y de la relación $\alpha^4 = \alpha + 1$ se obtiene la representación de todos los elementos del cuerpo como polinomios en α en la forma que aparece en el cuadro 3.

Un elemento h del cuerpo $GF(p^k)$ se llama un *resto m-ico* (cuadrático para $m = 2$, cúbico para $m = 3$) cuando existe un $g \in GF^*(p^k)$ tal que $g^m = h$. El conjunto H de los restos m -icos del cuerpo $GF(p^k)$ es un subgrupo multiplicativo de $GF^*(p^k)$, y las *coclases respecto de H*, es decir, los conjuntos del tipo gH , donde $g \in GF^*(p^k)$, constituyen una partición de $GF^*(p^k)$.²¹

Acabamos esta sección con dos definiciones más:²² Si $(G, +)$ es un grupo, un subconjunto S de G se llama *libre de sumas* si y sólo si no contiene elementos x, y, z tales que $x + y = z$. Una *r-partición libre de sumas* de G significa una partición del conjunto G^* de los elementos distintos del 0 en r subconjuntos, cada uno de los cuales es libre de sumas.

²⁰Notar que en \mathbb{Z}_2 se cumple que $-1 \equiv 1 \pmod 2$.

²¹Cuando m es un divisor de $p^k - 1$, el número de coclases, incluyendo H , es m . Además, $-1 \in H$ ocurre siempre si $p = 2$, pues $-1 \equiv 1 \pmod 2$; si p es impar, es necesario para ello que m sea divisor del número $\frac{1}{2}(p^k - 1)$.

²²Ver [31, p. 353].

Elemento	Elemento
$0 = 0$	$\alpha^7 = 1 + \alpha + \alpha^3$
$1 = 1$	$\alpha^8 = 1 + \alpha^2$
$\alpha = \alpha$	$\alpha^9 = \alpha + \alpha^3$
$\alpha^2 = \alpha^2$	$\alpha^{10} = 1 + \alpha + \alpha^2$
$\alpha^3 = \alpha^3$	$\alpha^{11} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$
$\alpha^4 = 1 + \alpha$	$\alpha^{12} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3$
$\alpha^5 = \alpha + \alpha^2$	$\alpha^{13} = 1 + \alpha^2 + \alpha^3$
$\alpha^6 = \alpha^2 + \alpha^3$	$\alpha^{14} = 1 + \alpha^3$

Cuadro 3: Representación aditiva de los elementos de $GF(16)$.

3. LAS DOS TRICOLORACIONES DE K_{16} SIN TRIÁNGULOS MONOCROMÁTICOS

Prosigamos ahora con nuestra historia. Greenwood y Gleason nos hacen tomar entonces, como vértices del grafo K_{16} (no importa en qué orden), los elementos $0, 1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{14}$ del cuerpo $GF(16)$.

Los restos cúbicos de $GF^*(16)$ forman el subgrupo $H_0 = \{1, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}\}$. Aparte del propio H_0 , las coclases respecto de H_0 son

$$H_1 = \alpha H = \{\alpha, \alpha^4, \alpha^7, \alpha^{10}, \alpha^{13}\} \quad \text{y} \quad H_2 = \alpha^2 H = \{\alpha^2, \alpha^5, \alpha^8, \alpha^{11}, \alpha^{14}\}.$$

Y la regla de coloración para las aristas del grafo es la siguiente: La arista $\{i, j\}$ ($i, j \in GF(16)$) se pinta de rojo (**r**), de verde (**v**) o de azul (**a**), según que la diferencia²³ $i - j$ pertenezca, respectivamente, a H_0, H_1 o H_2 .

Utilizando la representación de los elementos del cuerpo $GF(16)$ como polinomios en α podemos efectuar fácilmente las diferencias (o sumas) módulo 2 correspondientes, y obtener, según la regla, una tabla como la que presentamos en el cuadro 4, donde en la intersección de una fila y una columna aparece el color de la arista de K_{16} que une los vértices rotulados con los correspondientes elementos de $GF(16)$.

El resultado gráfico que se obtiene es el de la figura 5. En la figura 6 se ve el subgrafo formado por las aristas rojas, en dos presentaciones. En la segunda hemos tomado una ordenación en los elementos de $G(16)$ que le confiere simetría. Vía el automorfismo de $G(16)$ dado por $\varphi(g) = \alpha g$, que permuta circularmente según el ciclo (**r, v, a**) los colores de todas las aristas,²⁴ como es manifiesto recorriendo diagonalmente nuestra tabla anterior, los subgrafos de aristas verdes y de azules van a ser idénticos (salvo la correspondiente modificación en la rotulación de los vértices).

²³Daría igual la suma, ya que $-1 \equiv 1 \pmod 2$, con lo cual la coloración del grafo está bien definida, como quería Bollobás. Los conjuntos H_0, H_1 y H_2 forman una 3-partición libre de sumas de $GF^*(16)$ (que, como veremos luego, no es la única).

²⁴Es decir, si la arista $\{g, h\}$ es roja, la arista $\{\alpha g, \alpha h\}$ es verde, y la arista $\{\alpha^2 g, \alpha^2 h\}$ es azul ([21, p. 19]).

1	r																		
α	v	v																	
α^2	a	a	a																
α^3	r	a	r	r															
α^4	v	v	r	v	v														
α^5	a	v	a	v	a	a													
α^6	r	v	a	r	a	r	r												
α^7	v	r	a	r	v	r	v	v											
α^8	a	a	v	r	v	a	v	a	a										
α^9	r	v	r	a	v	a	r	a	r	r									
α^{10}	v	a	a	v	r	a	r	v	r	v	v								
α^{11}	a	r	r	r	a	v	r	v	a	v	a	a							
α^{12}	r	a	v	v	v	r	a	v	a	r	a	r	r						
α^{13}	v	r	r	a	a	a	v	r	a	r	v	r	v	v					
α^{14}	a	r	v	v	r	r	r	a	v	r	v	a	v	a	a				
	0	1	α	α^2	α^3	α^4	α^5	α^6	α^7	α^8	α^9	α^{10}	α^{11}	α^{12}	α^{13}				

Cuadro 4: Coloración de K_{16} de Greenwood y Gleason.

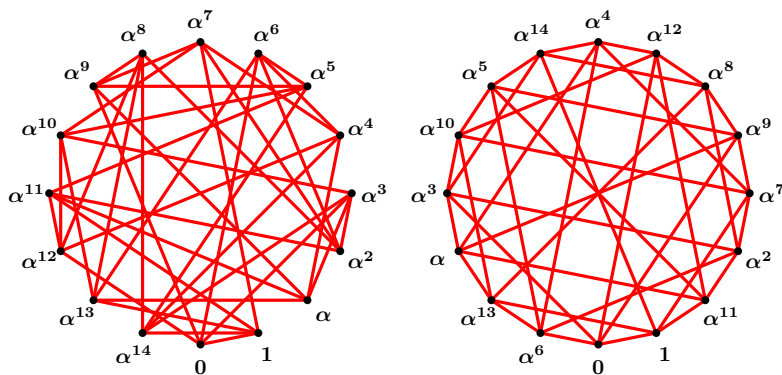


Figura 6: Subgrafo monocromático de aristas rojas en la figura 5.

Greenwood y Gleason nos proporcionan también ([19, p. 5]) una prueba rápida de que en la coloración de las aristas de K_{16} según esta regla no aparece ningún triángulo monocromático y, con ello, la prueba completa de que $R(3, 3, 3) = 17$:

Si hubiera un triángulo monocromático, sin pérdida de generalidad se puede considerar que es de color rojo y que sus vértices están etiquetados con los números $0, 1$ y h , con $h \neq 1$. Entonces, de acuerdo con la regla de coloración, los números h y $1 - h = 1 + h$ deberían estar en H_0 . Pero $1 + H_0 = \{0, \alpha^{14}, \alpha^{13}, \alpha^7, \alpha^{11}\}$, que es un conjunto disjunto con H_0 .

H. S. Sun y M. E. Cohen, en [32], presentan un modo más sencillo de conseguir una tricoloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos, a partir de una 3-partición libre de sumas del grupo $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ que forman los 16 códigos binarios de cuatro cifras

$$G = \{0000, 0001, 0010, 0011, \dots, 1111\}$$

con la suma que se ha definido antes para una suma directa de grupos aditivos (por ejemplo, $0001 + 0011 = 0010$).

En G , en efecto, la partición de $G \setminus \{0000\}$ en los tres subconjuntos²⁵

$$G_1 = \{1100, 0011, 1001, 1110, 1000\},$$

$$G_2 = \{1010, 0101, 0110, 1101, 0100\},$$

$$G_3 = \{0001, 0010, 0111, 1011, 1111\}$$

es una 3-partición libre de sumas (para todo $i = 1, 2, 3$, la suma de dos elementos de G_i nunca está en G_i , como se puede comprobar directamente). Entonces, identificando los vértices del grafo K_{16} con los elementos de este grupo G , se colorean las aristas de tres colores $i = 1, 2, 3$ de acuerdo con la siguiente regla: la arista que une los vértices x e y es de color i si y sólo si $x + y \in G_i$.

Esta coloración de K_{16} da el resultado deseado, porque, si hubiera un triángulo de color i , sin pérdida de generalidad se puede considerar que sus vértices están etiquetados con los códigos 0000, g y h ($g \neq h$). Entonces, de acuerdo con la regla de coloración, los códigos g , h y $g + h$ deberían estar los tres en G_i . Pero G_i es un subconjunto libre de sumas.

En [20],²⁶ J. G. Kalbfleisch mostró otra tricoloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos, encontrada utilizando un programa de búsqueda con ordenador escrito por un estudiante, Lee James, que no es isomorfa²⁷ a la de Greenwood y Gleason. Y de hecho, en [21], Kalbfleisch y R. G. Stanton demostraron, construyendo ambas mediante un nuevo método, que hay exactamente dos tricoloraciones no isomorfas de K_{16} sin triángulos monocromáticos, que son la de Greenwood-Gleason y la de Kalbfleisch-James. Siguiendo la nomenclatura de [31] las denominaremos, respectivamente, coloraciones X e Y . Presentaremos en primer lugar sus tablas, en el mismo formato que les dieron Kalbfleisch y Stanton, y los modos algebraicos de llegar a ellas. Los vértices de K_{16} van etiquetados siempre con los números $\{1, 2, \dots, 16\}$.

Una asignación de los elementos del cuerpo $GF(16)$ a los vértices de K_{16} que se corresponde exactamente con la tabla de la primera coloración X (cuadro 5) es la

²⁵El grupo aditivo de $GF(16)$ es también $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. La 3-partición de $GF(16)$ que forman las coclases de restos cúbicos es también libre de sumas. Los elementos de $GF(16)$, vía su representación en la forma $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3$ con $a_j \in \mathbb{Z}_2$, también se pueden representar como los códigos de G . Pero la 3-partición de G libre de sumas que resulta así es diferente de la que ofrecen Sun y Cohen.

²⁶Kalbfleisch acuñó precisamente en esa tesis doctoral (no publicada) el término «número de Ramsey».

²⁷Dos r -coloraciones G y H de las aristas de K_n se dicen *isomorfas* si existe una aplicación biyectiva f de los vértices de G en los vértices de H tal que, para todo par de vértices x, y de G , si la arista $\{x, y\}$ tiene color $i = 1, 2, \dots, r$, la arista $\{f(x), f(y)\}$ de H tiene color t_i , siendo (t_1, t_2, \dots, t_r) una permutación de $(1, 2, \dots, r)$ ([21, p. 10]).

1																
2	v															
3	a	v														
4	a	a	v													
5	v	a	a	v												
6	a	v	r	r	v											
7	v	a	v	r	r	a										
8	r	v	a	v	r	r	a									
9	r	r	v	a	v	r	r	a								
10	v	r	r	v	a	a	r	r	a							
11	v	r	a	a	r	r	a	v	v	a						
12	r	v	r	a	a	a	r	a	v	v	r					
13	a	r	v	r	a	v	a	r	a	v	v	r				
14	a	a	r	v	r	v	v	a	r	a	v	v	r			
15	r	a	a	r	v	a	v	v	a	r	r	v	v	r		
16	r	r	r	r	r	v	v	v	v	v	a	a	a	a	a	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Cuadro 5: Coloración X de las aristas de K_{16} .

siguiente (α es una raíz de $x^4 = x + 1$):

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^9 & \alpha^3 & \alpha^{12} & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha^4 & \alpha^{13} & \alpha^7 & \alpha & \alpha^5 & \alpha^{14} & \alpha^8 & \alpha^2 & \alpha^{11} & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

La tricoloración que se obtiene por el método de Sun y Cohen es también isomorfa a X , porque la siguiente asignación de los elementos del grupo $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ a los vértices de K_{16} , con la correspondencia de colores

$$(1, 2, 3) \longleftrightarrow (v, a, r),$$

da la misma coloración X :

$$\begin{pmatrix} 1111 & 0001 & 0010 & 1011 & 0111 & 1001 & 1100 & 1000 & 1110 & 0011 & & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & & & & & & & \\ & & & & & & 0110 & 1101 & 1010 & 0101 & 0100 & 0000 & & & & & \\ & & & & & & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Con relación a esta primera coloración, anotaremos finalmente aquí que la tricoloración de K_{16} que aparece en la lámina [1, Fig. 19.4] del libro de C. Berge (al que nos referiremos otra vez más adelante) es también isomorfa a X . La siguiente correspondencia entre los vértices de la coloración X y los del grafo de Berge (B) identifica los colores de todas las aristas:

$$\begin{pmatrix} X & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ B & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

1																
2	v															
3	a	a														
4	a	v	v													
5	v	a	v	a												
6	a	v	r	r	v											
7	v	a	v	r	r	a										
8	r	v	v	a	r	r	a									
9	r	r	a	v	v	r	r	a								
10	v	r	r	v	a	a	r	r	a							
11	v	r	a	a	r	r	a	v	v	a						
12	r	a	r	a	v	a	r	v	a	v	r					
13	a	r	v	r	a	v	a	r	a	v	v	r				
14	a	a	r	v	r	v	v	a	r	a	v	v	r			
15	r	v	a	r	a	a	v	a	v	r	r	v	v	r		
16	r	r	r	r	r	v	v	v	v	v	a	a	a	a	a	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Cuadro 6: Coloración Y de las aristas de K_{16} .

E. G. Whitehead Jr., en [33], señaló²⁸ que la segunda coloración Y (cuadro 6) se podía conseguir mediante la siguiente 3-partición libre de sumas del grupo $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$:

$$\begin{aligned}
 H_r &= \{22, 32, 23, 21, 12\}, \\
 H_v &= \{02, 33, 30, 10, 11\}, \\
 H_a &= \{20, 01, 13, 31, 03\}.
 \end{aligned}$$

Identificando los vértices del grafo K_{16} con los elementos de este grupo, la regla de coloración es: la arista que une los vértices x y y es de color c si y sólo si $x - y \in H_c$.²⁹

Una asignación de los elementos del grupo $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ a los vértices de K_{16} que da la coloración Y es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
 22 & 32 & 23 & 21 & 12 & 02 & 33 & 30 & 10 & 11 & 20 & 01 & 13 & 31 & 03 & 00 \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16
 \end{array} \right).$$

Daremos ahora unas ideas sobre dos construcciones grafo-teóricas que conducen a las dos coloraciones X e Y. Denotemos por $K_5(c_1, c_2)$ el K_5 que tiene los lados de color c_1 y las diagonales de color c_2 . Kalbfleisch y Stanton comienzan por unir el vértice 16 mediante aristas verdes a los vértices de un $K_5(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ de vértices consecutivos (6, 7, 8, 9, 10), mediante aristas rojas a los vértices de un $K_5(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ de vértices (no necesariamente consecutivos) {1, 2, 3, 4, 5}, y mediante aristas azules a los vértices de un $K_5(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ de vértices consecutivos (11, 12, 13, 14, 15). La coloración del resto de

²⁸Ver [31, p. 42–43]. Whitehead aún dio posteriormente otro modo de obtener la coloración Y.
²⁹La coloración está bien definida porque las clases de la partición son *simétricas* (un elemento y su opuesto pertenecen siempre a la misma clase). Ver [31, p. 35–36].

aristas rojas (deben salir cinco de cada vértice del grafo) evitando triángulos monocromáticos, utilizando un lema auxiliar nada inmediato,³⁰ lleva en primer lugar a la configuración de aristas rojas de la figura 7, que es común (incluyendo el etiquetado de los vértices) a ambas coloraciones.

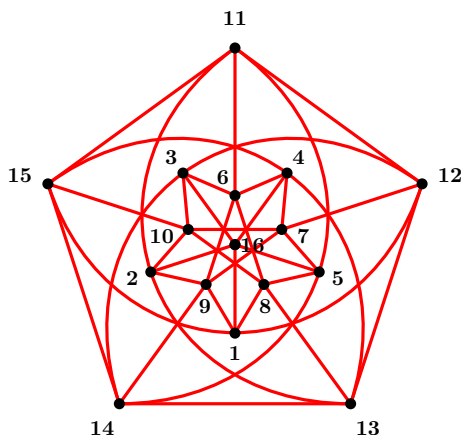


Figura 7: Aristas rojas en ambas coloraciones.

De hecho, con esta construcción,³¹ Kalbfleisch y Stanton demuestran que, en toda tricoloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos, el subgrafo definido por las aristas de cualquiera de los tres colores es isomorfo al grafo³² de la figura 7, lo que prueba visualmente la ausencia de triángulos monocromáticos.

La doble posibilidad aparece³³ al ir a establecer el subgrafo de aristas verdes, según que el K_5 de aristas verdes y azules sin triángulos monocromáticos de vértices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sea de la forma $K_5(v, a)$ con vértices consecutivos $(1, 2, 3, 4, 5)$ o bien $(1, 2, 4, 3, 5)$.³⁴ Las dos posibles configuraciones finales de este subgrafo son las de la figura 8, que superpuestas a la configuración común de aristas rojas (las restantes aristas serán azules) dan lugar a las dos (únicas) coloraciones no isomorfas.³⁵

C. Laywine y J. P. Mayberry, en [24], presentan otro modo de construcción que va a representar cada una de estas dos tricoloraciones de K_{16} mediante un conjunto apropiadamente conectado de cuatro K_4 idénticos. Vamos a ver las líneas generales de esta construcción, que puede ser más sencilla que la anterior.

³⁰[21, p. 11–13]: En un K_{16} tricolorado sin triángulos monocromáticos, si la arista uv es de color i , entonces a lo sumo dos vértices pueden estar unidos a la vez a u y a v por aristas de un mismo color $j \neq i$.

³¹[21, p. 13–14].

³²Que ya había aparecido en la tesis doctoral [20] de Kalbfleisch, y que en la literatura se suele encontrar (quizá de manera injusta) con el nombre de *grafo de Greenwood y Gleason* (ver [4, p. 242], por ejemplo).

³³[21, p. 15–19].

³⁴Las otras dos posibilidades $(1, 4, 5, 2, 3)$ y $(1, 4, 2, 5, 3)$ van a quedar descartadas.

³⁵En la literatura, la configuración X se denomina *recta (untwisted)*, y la configuración Y , *torcida (twisted)*.

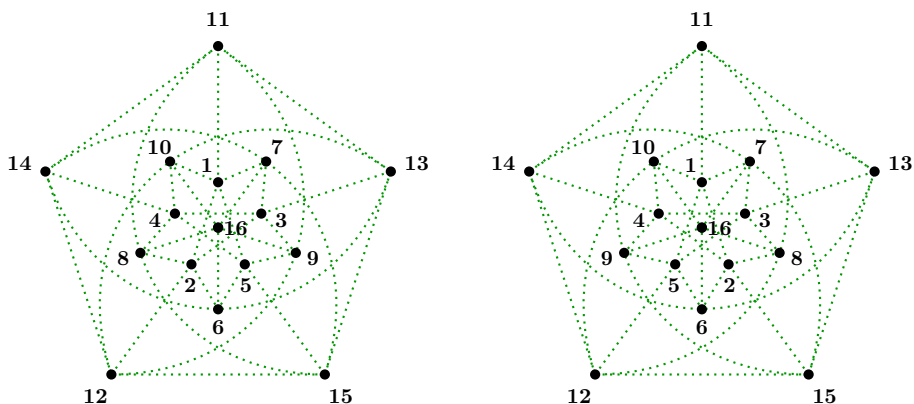


Figura 8: Aristas verdes en X (izda.) e Y (dcha.).

Denotemos por TTC (tetraedro tricolor) al grafo K_4 de aristas tricoloreadas de tal modo que a cada vértice llega una arista de cada color, como se ve en la figura 9.

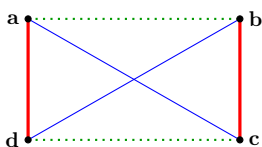


Figura 9: Un tetraedro tricolor (TTC).

Establezcamos una correspondencia de colores, por ejemplo $(r, v, a) \longleftrightarrow (0, 1, 2)$. Digamos que dos tetraedros tricolors TTC 1 y TTC 2 están *bien conectados con supercolor k* si cada vértice de TTC 1 está unido a cada vértice de TTC 2 con una arista de color $k + 1$ o $k - 1$ (módulo 3), y el K_8 resultante no contiene triángulos monocromáticos.³⁶

Supongamos que los conjuntos de vértices de TTC 1 y TTC 2 son, respectivamente, $\{a, b, c, d\}$ y $\{a', b', c', d'\}$, de modo que las aristas $u'v'$ y uv tienen el mismo color. Una *buena conexión con supercolor k* entre TTC 1 y TTC 2 puede hacerse esencialmente de dos maneras diferentes: una que llamaremos *positiva* y denotaremos por k^+ , cuando las aristas entre vértices correlativos v y v' son de color $k + 1$, y otra que llamaremos *negativa* y denotaremos por k^- , cuando esas aristas son de color $k - 1$. La figura 10 muestra esas dos buenas conexiones con supercolor azul fino ($k = 2$).

Al combinar cuatro TTC para formar un K_{16} como si los TTC fueran «supervértices» de un «super- TTC », es decir, de modo que entre cada par de TTC hay una buena conexión (llamémosla una «superarista», positiva o negativa según el *signo* de

³⁶Entonces, de las cuatro aristas que conectan un vértice de TTC 1 a los cuatro vértices de TTC 2, deben ser dos de color $k + 1$ y dos de color $k - 1$ (módulo 3).

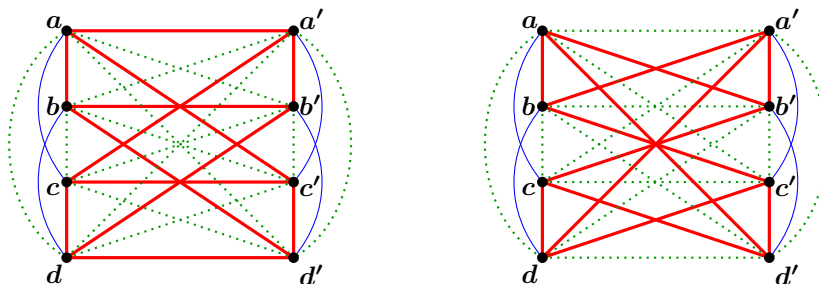


Figura 10: Buenas conexiones 2^+ (izda.) y 2^- (dcha.) entre dos *TTC*.

la buena conexión) y a cada *TTC* llega una superarista de cada supercolor, el K_{16} que resulta es obviamente libre de triángulos monocromáticos.

Laywine y Mayberry prueban, además, que la paridad del número total de superaristas negativas es invariante bajo los posibles isomorfismos de este K_{16} tricolor. De modo que hay sólo dos posibilidades no isomorfas para el super-*TTC*, que se esquematizan en la figura 11; la coloración X cuando las seis superaristas son positivas, y la Y cuando haya una sola superarista negativa.

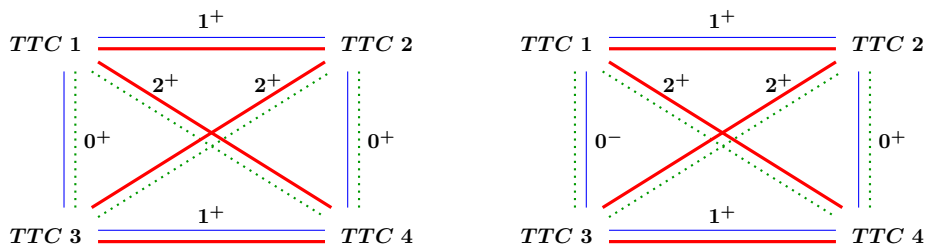


Figura 11: Coloraciones X (izda.) e Y (dcha.) de K_{16} .

Se ve así con claridad que hay, básicamente, dieciséis aristas que permutan los colores de una a otra tricoloración libre de triángulos monocromáticos de K_{16} , lo mismo que resulta de una comparación de los cuadros 5 y 6.

4. OTROS RESULTADOS DE GREENWOOD Y GLEASON

Siguiendo los pasos de Greenwood y Gleason en [19], volvemos ahora con el cálculo de los primeros números de Ramsey bicolors. Así, sin perder generalidad supondremos en lo que sigue que, en el enunciado correspondiente del teorema 1, el primer color es rojo y el segundo azul, de modo que en $R(m, \ell)$, m es el número de vértices del posible subgrafo completo rojo (es decir, que tiene todas las aristas de color rojo), y ℓ el número de vértices del posible subgrafo completo azul.

En primer lugar veamos su demostración del siguiente resultado (obsérvese que no presuponemos que el teorema 1 esté ya probado):³⁷

TEOREMA 2. (i) *Supuestos finitos los números de Ramsey $R(m-1, \ell)$ y $R(m, \ell-1)$, el número $R(m, \ell)$ también es finito; de hecho, para $m, \ell \geq 2$ se cumple*

$$R(m, \ell) \leq R(m-1, \ell) + R(m, \ell-1).$$

(ii) *Además, si los dos números de la derecha son pares, la desigualdad es estricta.*

DEMOSTRACIÓN. (i) Sea $n = R(m-1, \ell) + R(m, \ell-1)$ y consideremos un grafo bicolor K_n de conjunto de vértices T . Nos fijamos en un vértice v_0 . De v_0 parten n_1 aristas rojas que lo unen a los vértices de un conjunto T_1 , y n_2 aristas azules que lo unen a los vértices de un conjunto T_2 . Como $T_1 \cup T_2 = T \setminus \{v_0\}$ y $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, se verifica

$$n_1 + n_2 + 1 = R(m-1, \ell) + R(m, \ell-1).$$

Si $n_1 < R(m-1, \ell)$, entonces $n_2 \geq R(m, \ell-1)$ y nos fijamos en el conjunto T_2 . De acuerdo con el teorema 1, el subgrafo de conjunto de vértices T_2 contiene un K_m rojo o un $K_{\ell-1}$ azul de conjunto de vértices S_2 ; en este último caso, el subgrafo de conjunto de vértices $S_2 \cup \{v_0\}$ sería un K_ℓ azul.

Si $n_1 \geq R(m-1, \ell)$, nos fijamos en el conjunto T_1 y hacemos una argumentación similar.

(ii) Supongamos que $R(m-1, \ell) = 2p$ y $R(m, \ell-1) = 2q$. Sea $n = 2p + 2q - 1$ y consideremos un grafo bicolor K_n . De un cierto vértice fijo v_0 parten $2p + 2q - 2$ aristas, n_1 rojas y n_2 azules. Caben tres posibilidades: (a) $n_1 \geq 2p$; (b) $n_2 \geq 2q$; (c) $n_1 = 2p - 1$ y $n_2 = 2q - 1$.

En los casos (a) y (b), el análisis hecho en (i) lleva a que

$$R(m, \ell) \leq n = 2p + 2q - 1 < 2p + 2q,$$

como se quiere probar. Y la posibilidad (c) no puede ocurrir para todos los vértices de K_n , pues en tal caso habría un total de $(2p + 2q - 1)(2p - 1)$ vértices extremos de aristas rojas, un número impar, lo que es absurdo, porque como estamos contando dos extremos por arista, ese número total de extremos debiera ser par. Luego debe haber al menos un vértice en el que se dé la posibilidad (a) o la (b). \square

COROLARIO 1. $R(3, 4) \leq 9$; $R(3, 5) \leq 14$; $R(4, 4) \leq 18$.

DEMOSTRACIÓN. Como $R(2, 4) = 4$ y $R(3, 3) = 6$, aplicando el teorema 2(ii) se sigue que $R(3, 4) \leq 9$. Entonces, aplicando el teorema 2(i),

$$R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) \leq 5 + 9 = 14$$

y

$$R(4, 4) \leq 2R(3, 4) \leq 18. \quad \square$$

³⁷Este resultado se debe, esencialmente, a Erdős y Szekeres, [9]. En particular, permite demostrar por doble inducción el teorema de Ramsey en el caso bicolor y establecer (por comparación con la tabla de los números combinatorios) la acotación superior $R(m, \ell) \leq \binom{m+\ell-2}{m-1}$.

TEOREMA 3. $R(3, 5) = 14$.

DEMOSTRACIÓN. Según el corolario 1, sólo queda ver que $R(3, 5) > 13$. Identificamos los vértices de un grafo K_{13} con los elementos $0, 1, \dots, 12$ del cuerpo finito \mathbb{Z}_{13} .³⁸ La clase de los restos cúbicos módulo 13 es $H = \{1, 5, 8, 12\}$.

Se colorean las aristas de K_{13} con la siguiente regla: la arista que une los vértices x e y es roja si y sólo si $x - y \in H$ (como $-1 \equiv 12 \in H$, la coloración está bien definida). En este K_{13} bicolor, no hay triángulos rojos ni subgrafos K_5 azules:

Si hubiera un triángulo rojo, sin perder generalidad se pueden suponer los vértices $0, 1$, y h , con h y $1 - h \in H$. Pero el conjunto $1 - H = \{0, 9, 6, 2\}$ es disjunto con H .

Si hubiera un K_5 azul, sin perder generalidad se pueden suponer sus vértices $0, 2, b, c, d$, de modo que $b, c, d, 2 - b, b - c, c - d, d - 2, 2 - c$ y $b - d$ pertenecen a $\bar{H} = \mathbb{Z}_{13} \setminus H$ (y $2, b, c, d$ son elementos distintos, y entre ellos no hay dos consecutivos, pues $\pm 1 \notin \bar{H}$).

Eso reduce la comprobación a sólo nueve cuaternas $(2, b, c, d)$, y en todas ellas hay dos elementos cuya diferencia es $5 \notin \bar{H}$:

- $(2, 4, 6, 9); (2, 4, 6, 10); (2, 4, 6, 11); (2, 4, 7, 9); (2, 4, 7, 10);$
- $(2, 4, 7, 11); (2, 4, 9, 11); (2, 6, 9, 11); (2, 7, 9, 11).$ □

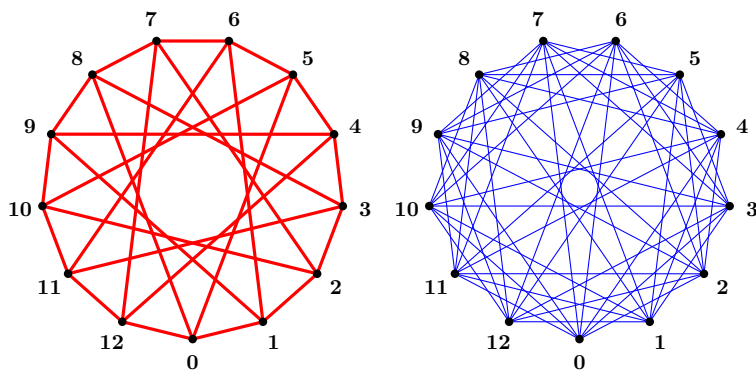


Figura 12: $R(3, 5) > 13$.

COROLARIO 2. $R(3, 4) = 9$.

DEMOSTRACIÓN. Según el corolario 1, $R(3, 4) \leq 9$. Y, aplicando los teoremas 2 y 3,

$$14 = R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) = 5 + R(3, 4),$$

de donde resulta $R(3, 4) \geq 9$. □

³⁸En \mathbb{Z}_{13} , lo mismo que en $GF(16)$, -1 es resto cúbico y la ecuación $1 + x^3 + y^3 = 0$ no tiene soluciones (ver [19, p. 7]).

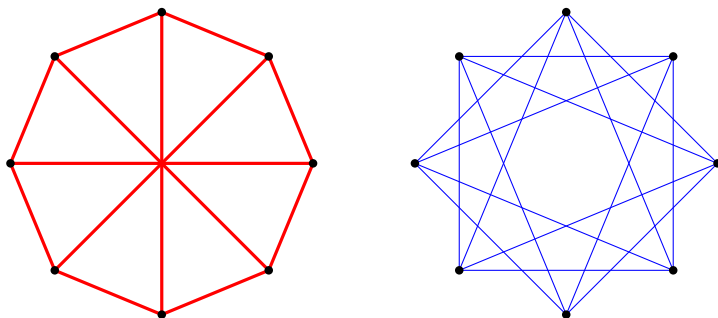


Figura 13: Otra demostración de $R(3, 4) > 8$.

TEOREMA 4. $R(4, 4) = 18$.

DEMOSTRACIÓN. Identificamos los vértices de un K_{17} con los elementos $0, 1, \dots, 16$ del cuerpo finito \mathbb{Z}_{17} . Los restos cuadráticos módulo 17 forman el subgrupo multiplicativo $H = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$ de \mathbb{Z}_{17}^* , y la coclase de no-restos cuadráticos es $3H = \mathbb{Z}_{17}^* \setminus H$.

Se colorean las aristas de K_{17} con la regla: la arista que une los vértices x e y es roja si y sólo si $x - y \in H$ (como $-1 \equiv 16 \in H$, la coloración está bien definida). En este K_{17} bicolor, no hay subgrafos K_4 monocromáticos:

De lo contrario, sin perder generalidad se puede suponer que hay un K_4 monocromático con vértices $0, a, b$ y c , de modo que $\{a, b, c, b - a, c - a, b - c\}$ es un subconjunto de una de las coclases H o $3H$, siendo a, b y c distintos, y distintos de 0. Multiplicando por a^{-1} , debe ocurrir que $\{1, B, C, B - 1, C - 1, B - C\} \subset H$, siendo $B = ba^{-1}$ y $C = ca^{-1}$ distintos de 1. Pero esto no ocurre: cuando $B = 16$ y $C = 9$, $B - C = 7 \notin H$. \square

Después de estos resultados, Greenwood y Gleason pasan a estudiar, para $r \geq 4$, los números de Ramsey multicolores del tipo $R(3^r) = R(3, \binom{r}{\cdot}, 3)$. En primer lugar prueban las estimaciones $42 \leq R(3^4) \leq 66$ (la inferior nuevamente con su técnica de cuerpos finitos),³⁹ y a continuación generalizan la estimación superior:⁴⁰

TEOREMA 5. Para todo $r \geq 2$ se tiene $R(3^r) \leq 1 + r! \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} = 1 + \lfloor r! e \rfloor$.

³⁹Según la información de [26], las cotas que se conocen actualmente para este número de Ramsey son $51 \leq R(3^4) \leq 62$ ([6] y [12], respectivamente). En el primero de estos trabajos, Chung generaliza la construcción de [21] y demuestra la acotación inferior general $R(3^r) \geq 3R(3^{r-1}) + R(3^{r-3}) - 3$ (para $r \geq 4$). La prueba de la cota superior en el segundo trabajo se basa en la utilización de algoritmos computacionales.

⁴⁰Ver la prueba original en [19, p. 6]. Soifer completa la explicación en [29, p. 250]. Nosotros transcribimos la demostración que ofrece Berge en [1, p. 440–441]. La cota se alcanza en los casos $r = 2$ y 3 , y para $r = 4$ es 66.

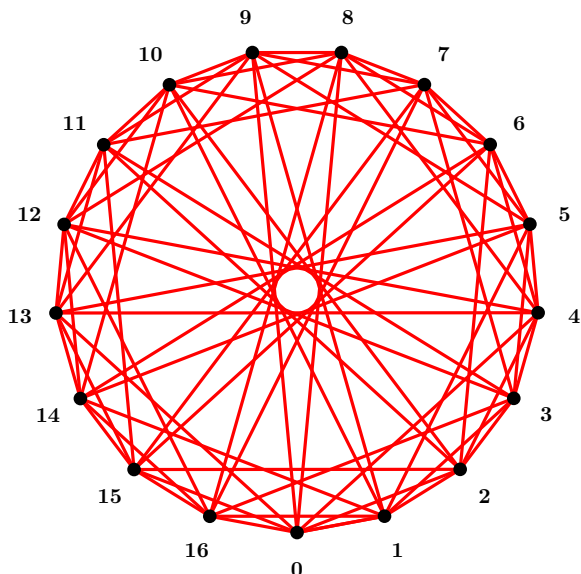


Figura 14: $R(4, 4) > 17$ (aristas rojas).

DEMOSTRACIÓN. Para $r \geq 1$, denotemos $n(r) = R(3^r) - 1$ (es claro que $n(1) = 2$). Dado un r fijo, de acuerdo con el teorema 1, podemos encontrar un grafo r -coloreado $K_{n(r)}$ que no contenga triángulos monocromáticos. Fijémonos en un vértice cualquiera v_0 de ese grafo, y sea T_i (para cada $i = 1, \dots, r$) el conjunto de los vértices que están conectados con v_0 por aristas de color i .

En el subgrafo completo $K_{|T_i|}$ de conjunto de vértices T_i no puede haber ninguna arista de color i (porque formaría un triángulo de color i junto con el vértice v_0), luego $K_{|T_i|}$ es un grafo $(r - 1)$ -coloreado (le falta el color i) que además no contiene triángulos monocromáticos, de modo que su número de vértices $|T_i|$ debe cumplir

$$|T_i| \leq R(3^{r-1}) - 1 = n(r - 1).$$

Como los conjuntos T_i son disjuntos, se deduce que

$$n(r) - 1 = \sum_{i=1}^r |T_i| \leq r \cdot n(r - 1).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} n(1) &\leq 1 && + 1 \\ n(2) &\leq 2 && + 1 \\ \dots & && \dots \\ n(r - 1) &\leq (r - 1) \cdot n(r - 2) + 1 \\ n(r) &\leq r \cdot n(r - 1) && + 1, \end{aligned}$$

de donde resulta⁴¹

$$n(r) \leq 1 + r + r(r-1) + \cdots + r! + r! = r! \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} = \lfloor r! e \rfloor. \quad \square$$

5. EPÍLOGO

G. Kéry probó en 1964, en [23], el resultado $R(3, 6) = 18$.⁴² Greenwood y Gleason habían dejado las cosas en $17 \leq R(3, 6) \leq 20$. La acotación superior resultaba por aplicación del teorema 2. No podemos acabar sin consignar antes la ingeniosa manera en que presentan la prueba de la acotación inferior ([19, p. 5]):

Hay que imaginarse a una persona daltónica que no distingue entre los colores verde y rojo, sino que ve cualquiera de ellos en una tonalidad «verdirroja», que mira un grafo tricolorado (rojo, verde, azul) K_{16} sin triángulos monocromáticos. Esa persona no verá, entonces, ningún triángulo azul. Pero tampoco verá ningún K_6 verdirrojo, porque en tal caso habría un triángulo verde o uno rojo, ya que $R(3, 3) = 6$. Por lo tanto, $R(3, 6) > 16$.

Y quien haya llegado hasta aquí se habrá dado cuenta de que no hemos resuelto todavía el problema 6 de la 20.^a IMO. No importa, porque ahora, con ayuda del teorema 5, le podemos dar una solución rápida:⁴³

Sea $R(3^6) = s$. Toda partición de la lista de números $1, 2, \dots, s-1$ en 6 subconjuntos disjuntos, como la que propone el enunciado del problema, puede verse como una 6-coloración de los números de la lista, que a su vez induce una 6-coloración de las aristas de un grafo K_s que tenga los vértices etiquetados con los números $1, 2, \dots, s$, si se le asigna a la arista $\{i, j\}$ del grafo el color que tiene el número $|i-j|$ en la lista.

Por definición de $R(3^6)$, ese grafo K_s contiene un triángulo monocromático xyz . Por lo tanto, hay tres números distintos $x < y < z$ en $\{1, 2, \dots, s\}$ tales que los números (no necesariamente todos distintos) $a = y - x$, $b = z - y$ y $c = z - x$ pertenecen al mismo subconjunto de la partición de la lista inicial. Pero

$$a + b = (z - y) + (y - x) = z - x = c,$$

y con esto hemos terminado, ya que $R(3^6) \leq \lfloor 6! e \rfloor = 1957 < 1979$.⁴⁴

⁴¹Multiplicando de abajo arriba las desigualdades sucesiva y respectivamente por los números $1, r, r(r-1), \dots, r(r-1) \cdots 2$ y sumando todo.

⁴²D. Cariolaro ha ofrecido más recientemente, en [5], una prueba más sencilla que las anteriormente conocidas.

⁴³Issai Schur enunció y demostró en 1916, en [28], donde lo utilizaba como un «lema auxiliar muy sencillo», el resultado general: «En toda distribución de los números $\{1, 2, \dots, N\}$ en m filas, siempre que $N > m!e$ se podrán encontrar en al menos una de las filas dos números cuya diferencia esté también en esa misma fila [dicho de otra manera, dos números no necesariamente distintos cuya suma esté también en la misma fila]», que se conoce en la literatura sobre teoría de Ramsey como *Teorema de Schur* (ver [15, p. 97], [16, p. 69–70], [11, p. 277–279]). A. Soifer ([29, p. 301–303]) lo denomina «obra maestra de Schur». La argumentación «de tipo Ramsey» para probarlo, que presentamos aquí en el caso particular $m = 6$, se debe a Vera T. Sós, y fue comunicada por P. Erdős ([8, p. 202–203]) en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1970 en Niza.

⁴⁴Hoy se conoce que $R(3^6) \leq 1838$ ([22]).

AGRADECIMIENTOS. Los autores agradecen al revisor del artículo sus comentarios y observaciones, que han contribuido a mejorar el resultado final del trabajo.

REFERENCIAS

- [1] C. BERGE, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6, Elsevier, 1973.
- [2] E. D. BOLKER (COORD. ED.), Andrew M. Gleason 1921–2008, *Notices Amer. Math. Soc.* **56** (No. 10, Nov. 2009), 1236–1267.
- [3] B. BOLLOBÁS, *Graph Theory: An introductory course*, Graduate Texts in Mathematics, 63, Springer, 1979.
- [4] J. A. BONDY Y U. S. R. MURTY, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, 1976.
- [5] D. CARIOLARO, On the Ramsey Number $R(3, 6)$, *Australas. J. Combin.* **37** (2007), 301–304.
- [6] F. R. K. CHUNG, On the Ramsey numbers $R(3, 3, \dots, 3; 2)$, *Discrete Math.* **5** (1973), 317–321.
- [7] D DJUKIĆ, V. JANKOVIĆ, I. MATIĆ Y N. PETROVIĆ, *The IMO Compendium: A collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004*, Springer, 2006.
- [8] P. ERDŐS, On the application of combinatorial analysis to number theory, geometry and analysis, *Actes du Congrès international des Mathématiciens* (Nice, 1970), Tome 3, 201–210, Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [9] P. ERDŐS Y G. SZEKERES, On a combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* **2** (1935), 463–470.
- [10] L. EULER, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, E.53, *Comm. Ac. Petrop.* 8 (1736), 1741, p. 128–140. En *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series prima, vol. VII (*Commentationes algebraicæ ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*, edidit Louis Gustave du Pasquier), Lipsiæ et Berolini typis et in ædibus B. G. Teubneri, 1923, p. 1–10.
- [11] P. FERNÁNDEZ Y J. L. FERNÁNDEZ, “El desorden absoluto es imposible”: la Teoría de Ramsey, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **2** (1999), 263–289.
- [12] S. E. FETTES, R. L. KRAMER Y S. P. RADZISZOWSKI, An upper bound of 62 on the classical Ramsey number $R(3, 3, 3, 3)$, *Ars Combinatoria* **72** (2004), 41–63.
- [13] A. M. GLEASON, R. E. GREENWOOD Y L. M. KELLY, *The William Lowell Putnam Mathematical Competition: Problems and solutions: 1938–1964*, Mathematical Association of America, 1980.
- [14] A. W. GOODMAN, On sets of acquaintances and strangers at any party, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 778–783.
- [15] R. L. GRAHAM Y B. L. ROTHSCHILD, Ramsey Theory, *Studies in Combinatory* (G.-G. Rota, ed.), Mathematical Association of America, **17** (1978), 80–99.

- [16] R. L. GRAHAM, B. L. ROTHSCCHILD Y J. H. SPENCER, *Ramsey Theory*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, 1990.
- [17] R. L. GRAHAM Y J. H. SPENCER, Teoría de Ramsey, *Investigación y Ciencia* (noviembre de 1990), 74–80.
- [18] B. GREEN, Ramsey Theory and the IMO, *The Mathematical Gazette* **86**, No. 506 (2002), 204–207.
- [19] R. E. GREENWOOD Y A. M. GLEASON, Combinatorial relations and chromatic graphs, *Canad. J. Math.* **7** (1955), 1–7.
- [20] J. G. KALBFLEISCH, *Chromatic Graphs and Ramsey's Theorem*, Ph. D. thesis, University of Waterloo, 1966.
- [21] J. G. KALBFLEISCH Y R. G. STANTON, On the maximal triangle-free edge-chromatic graphs in three colors, *J. Comb. Theory* **5** (1968), 9–20.
- [22] M. KERBER Y C. ROWAN, Common Lisp program for computing upper bounds on classical Ramsey numbers, <http://www.cs.bham.ac.uk/~mmk/demos/ramsey-upper-limit.lisp> (2009).
- [23] G. KÉRY, Ramsey egy gráfelméleti téleléről, *Matematikai Lapok* **15** (1964), 204–224.
- [24] C. LAYWINE Y J. P. MAYBERRY, A simple construction giving the two non-isomorphic triangle-free 3-colored K_{16} 's, *J. Comb. Theory* **45** (1988), 120–124.
- [25] J. R. NEWMAN, *Sigma: el mundo de las matemáticas*, Vol. 4, Grijalbo, 1985.
- [26] S. P. RADZISZOWSKI, Small Ramsey Numbers, revision #13, August 22, 2011, *Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Surveys, DS1, <http://www.combinatorics.org/issue/view/Surveys>
- [27] F. P. RAMSEY, On a Problem of Formal Logic, *Proc. London Math. Soc.* **30** (1930), 264–286.
- [28] I. SCHUR, Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m \pmod{p}$, *Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung* **25** (1916), 114–117.
- [29] A. SOIFER, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.
- [30] A. SOIFER (ED.), *Ramsey Theory: Yesterday, Today and Tomorrow*, Springer, 2011.
- [31] A. P. STREET Y W. D. WALLIS, Sum-free sets, coloured graphs and designs, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **22** (1976), 35–53.
- [32] H. S. SUN Y M. E. COHEN, An easy proof of the Greenwood-Gleason evaluation of the Ramsey number $R(3, 3, 3)$, *Fibonacci Quart.* **22** (3) (1984), 235–238.
- [33] E. G. WHITEHEAD JR., Algebraic structure of chromatic graphs associated with the Ramsey number $N(3, 3, 3; 2)$, *Discrete Math.* **1** (1971), 113–114.

E. FERNÁNDEZ MORAL, IES P. M. SAGASTA, GLORIETA DEL DOCTOR ZUBÍA s/N, 26003 LOGROÑO
 Correo electrónico: e.fernandez@iessagasta.com

L. RONCAL, DPTO. DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, 26004 LOGROÑO
 Correo electrónico: luz.roncal@unirioja.es